



Dérivées partielles : Révisions

Exercice 1

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?
2. Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque distinct de l'origine.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x , à y en $(0, 0)$?

[Indication ▾](#) [Correction ▾](#)

[002624]

Exercice 2

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0), \\ f(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$? Justifier la réponse.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x , à y en $(0, 0)$? Donner la ou les valeurs le cas échéant et justifier la réponse.
3. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$? Justifier la réponse.
4. Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.
5. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1, 1, 2)$.
6. Soit $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x, y) = (f(x, y), f(y, x))$. Déterminer la matrice jacobienne de F au point $(1, 1)$. La fonction F admet-elle une réciproque locale au voisinage du point $(2, 2)$?

[Indication ▾](#) [Correction ▾](#)

[002625]

Exercice 3

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

[Indication ▾](#) [Correction ▾](#)

[002626]

Exercice 4

On considère les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = (\sin(xy), y \cos x, x y \sin(xy) \exp(y^2)), \quad g(u, v, w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.

2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobniennes $J_f(x, y)$ et $J_g(u, v, w)$ de f et de g .
4. Retrouver le résultat sous (2.) en utilisant un produit approprié de matrices jacobniennes.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[002627]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Utiliser les coordonnées polaires (r, φ) dans le plan et le fait que $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} r \log r = 0$.

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Pour réfuter la différentiabilité de f en $(0, 0)$, il suffit de trouver une dérivée directionnelle qui n'est pas combinaison linéaire des dérivées partielles (par rapport aux deux variables).
2. Le plan tangent au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ du graphe $z = f(x, y)$ de F est donnée par l'équation

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (2)$$

Indication pour l'exercice 3 ▲

Calculer mène à la vérité.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Écrire $f(x, y) = (\sin(xy), y \cos x, xy \sin(xy) \exp(y^2)) = (u, v, w)$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x = e^{x \log(x^2 + y^2)} = e^{2r \cos \varphi \log r}$. Puisque $\cos \varphi$ est borné, $\lim_{r \rightarrow 0} 2r \cos \varphi \log r = 0$ d'où

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x, y) = e^{\lim_{r \rightarrow 0} 2r \cos \varphi \log r} = e^0 = 1,$$

car la fonction exponentielle est continue.

2. Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ les dérivées partielles par rapport aux variables x et y se calculent ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \left(\log(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2)^x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2)^x \end{aligned}$$

3. Pour que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe, il faut et il suffit que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x, 0) - 1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{(x^2)^x - 1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{2x \log x} - 1}{x}$$

existe. Si $x > 0$,

$$\frac{e^{2x \log x} - 1}{x} = 2 \log x + \varepsilon(x)$$

où $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \varepsilon(x) = 0$. Par conséquent, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas. D'autre part,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{f(0, y) - 1}{y} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{(y^2)^0 - 1}{y} = 0$$

existe.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Puisque $f(x, y) = \frac{x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2} = r(\cos^2 \varphi \sin \varphi + 3 \sin^3 \varphi)$, il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x, y) = 0$$

car $\cos^2 \varphi \sin \varphi + 3 \sin^3 \varphi$ reste borné. Par conséquent la fonction f est continue en $(0,0)$.

2. Les dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x, 0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{0}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{f(0, y)}{y} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{3y^3}{y^2} = 3 \end{aligned}$$

existent.

3. Puisque $f(x, x) = \frac{4x^3}{2x^2} = 2x$, la dérivée directionnelle $D_v f(0,0)$ suivant le vecteur $v = (1, 1)$ est non nulle. Par conséquent, la fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

4.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2} = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2x(x^2 y + 3y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = -4 \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + 3y^2)(x^2 + y^2) - 2y(x^2 y + 3y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 8x^2 y^2 + 3y^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

5. D'après (2), cette équation s'écrit

$$z-2 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) = 1-x+3(y-1)$$

d'où $z = 3y - x$.

6. La fonction $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s'écrit $F(x, y) = \left(\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}, \frac{y^2x+3x^3}{x^2+y^2} \right)$ et sa matrice jacobienne

$$J_F(1,1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

au point $(1, 1)$ est inversible. Par conséquent, la fonction F admet une réciproque locale au voisinage du point $(1, 1)$. Au point $(2, 2)$,

$$J_F(2,2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) & \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

d'où la fonction F admet également une réciproque locale au voisinage du point $(2, 2)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

d'où (1).

Correction de l'exercice 4 ▲

$$1. \quad g(f(x, y)) = xy^2 \sin^2(xy) \cos x \exp(y^2)$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} &= y^2 \sin(xy) \exp(y^2) (2xy \cos x \cos(xy) - x \sin x \sin(xy) + \cos x \sin(xy)) \\ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} &= 2xy \cos x \sin(xy) \exp(y^2) (xy \cos(xy) + (1+y^2) \sin(xy)) \end{aligned}$$

3. Calculons d'abord

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= y \sin(xy) \exp(y^2) + xy^2 \cos(xy) \exp(y^2) \\ &= y \exp(y^2) (\sin(xy) + xy \cos(xy)) \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= x \sin(xy) \exp(y^2) + x^2 y \cos(xy) \exp(y^2) + 2xy^2 \sin(xy) \exp(y^2) \\ &= x \exp(y^2) (\sin(xy) + xy \cos(xy) + 2y^2 \sin(xy)) \\ &= x \exp(y^2) ((1+2y^2) \sin(xy) + xy \cos(xy)). \end{aligned}$$

Ainsi la matrice jacobienne J_f de f s'écrit

$$\begin{aligned} J_f &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ -y \sin x & \cos x \\ y \exp(y^2) (\sin(xy) + xy \cos(xy)) & x \exp(y^2) ((1+2y^2) \sin(xy) + xy \cos(xy)) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De même, la matrice jacobienne J_g de g est :

$$\begin{aligned} J_g &= \left[\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w} \right] = [vw, uw, uv] \\ &= [xy^2 \sin(xy) \cos x \exp(y^2), xy \sin^2(xy) \exp(y^2), y \sin(xy) \cos x] \end{aligned}$$

4. La matrice jacobienne $J_{g \circ f}$ de la fonction composée $g \circ f$ s'écrit comme produit matriciel

$$J_{g \circ f} = J_g \circ J_f = \left[\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} &= (xy^2 \sin(xy) \cos x \exp(y^2)) y \cos(xy) \\ &\quad - (xy \sin^2(xy) \exp(y^2)) y \sin x \\ &\quad + (y \sin(xy) \cos x) y \exp(y^2) (\sin(xy) + xy \cos(xy)) \\ &= xy^3 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) - xy^2 \sin x \sin^2(xy) \exp(y^2) \\ &\quad + y^2 \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) + xy^3 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) \\ &= y^2 \sin(xy) \exp(y^2) (2xy \cos x \cos(xy) - x \sin x \sin(xy) + \cos x \sin(xy)) \\ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} &= (xy^2 \sin(xy) \cos x \exp(y^2)) x \cos(xy) \\ &\quad + (xy \sin^2(xy) \exp(y^2)) \cos x \\ &\quad + (y \sin(xy) \cos x) x \exp(y^2) ((1 + 2y^2) \sin(xy) + xy \cos(xy)) \\ &= x^2 y^2 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) + x y \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) \\ &\quad + xy(1 + 2y^2) \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) + x^2 y^2 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) \\ &= 2x^2 y^2 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) + 2xy(1 + y^2) \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) \\ &= 2xy \cos x \sin(xy) \exp(y^2) (x y \cos(xy) + (1 + y^2) \sin(xy)). \end{aligned}$$
